《目次》

第１講　極限 …… 2
第２講　面積 …… 4
第３講　積分評価 …… 6
第４講　体積，複素数 …… 8

《第１講　極限》

1　n を 3 以上の自然数とする．当たりくじ 2 本を含む n 本のくじがある．くじを引いて，当たりなら持ち点に 1 を加算し，はずれなら持ち点は変わらないとする．最初の持ち点は 0 とし，くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す．k を 0 以上の整数とする．n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする．

(1)　確率 $p_n(k)$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ を求めよ．ただし，e を自然対数の底とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$ であることを用いてもよい．

(3)　$p(k) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ と定める．値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ．

2 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ は次の関係式をみたすとする.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x (x-t)g(t)\,dt \\
g(x) &= (2-x)e^{-x} - \pi\sin(\pi x) + 2f'(1) + 2
\end{aligned}
$$

以下の問に答えよ.

(1) $f'(1)$ の値を求めよ.

(2) x を $0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数とするとき,

$$x^2 - \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 \leqq f(x) \leqq x^2$$

であることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{x\sin x}$ を求めよ.

テキスト解答

《第１講　極限》

1　n を 3 以上の自然数とする．当たりくじ 2 本を含む n 本のくじがある．くじを引いて，当たりなら持ち点に 1 を加算し，はずれなら持ち点は変わらないとする．最初の持ち点は 0 とし，くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す．k を 0 以上の整数とする．n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする．

(1)　確率 $p_n(k)$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ を求めよ．ただし，e を自然対数の底とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=e^{-2}$ であることを用いてもよい．

(3)　$p(k)=\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ と定める．値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ．

【答】　(1)　$\begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(\dfrac{2}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-k} & (0\leqq k\leqq n \text{ のとき}) \\ 0 & (n+1\leqq k \text{ のとき}) \end{cases}$　(2)　$\dfrac{2^k}{k!}e^{-2}$　(3)　1，2

【解説】　(1)　$0\leqq k\leqq n$ のとき，n 回の試行で k 回の当たりの選び方は ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りで，それらすべて同じ確率の $\left(\dfrac{2}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-k}$ なので

$$\begin{aligned} p_n(k) &= {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

また，$n+1\leqq k$ のときは k 回の当たりを引くことはできないので $p_n(k)=0$.

以上より $p_n(k)=\begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(\dfrac{2}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n-k} & (0\leqq k\leqq n \text{ のとき}) \\ 0 & (n+1\leqq k \text{ のとき}) \end{cases}$

(2)　$n\to\infty$ なので $0\leqq k\leqq n$ と考えてよく，$k\geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} p_n(k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdots\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^k\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+2}{n}\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{2^k}{k!}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-k} \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{2^k}{k!}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-k} \\ &\to \frac{2^k}{k!}e^{-2}\ (n\to\infty) \end{aligned}$$

となる．

また，$k=0$ のときは

$$p_n(k)=\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \to e^{-2}\ \ (n\to\infty)$$

となることより，$k\geqq 0$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(k)=\frac{2^k}{k!}e^{-2}$.

(3)　$k\geqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} p(k+1)-p(k) &= \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}e^{-2}-\frac{2^k}{k!}e^{-2} \\ &= \frac{2^k}{(k+1)!}e^{-2}(1-k) \end{aligned}$$

であることより，$k<1$ つまり $k=0$ のとき $p(k+1)-p(k)>0$. ゆえに $p(0)<p(1)$.

$k=1$ のとき $p(k+1)-p(k)=0$. ゆえに $p(1)=p(2)$.

$k>1$ つまり $k=2,\ 3,\ \cdots$ のとき $p(k+1)-p(k)<0$. ゆえに $p(2)>p(3)>p(4)>\cdots$.

以上より $p(k)$ が最大となる k は $k=1,\ 2$.

2　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ は次の関係式をみたすとする．

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (x-t)g(t)\,dt \\ g(x) &= (2-x)e^{-x}-\pi\sin(\pi x)+2f'(1)+2 \end{aligned}$$

以下の問に答えよ．

(1)　$f'(1)$ の値を求めよ．

(2)　x を $0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数とするとき，

$$x^2-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3 \leqq f(x) \leqq x^2$$

であることを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x\sin x}$ を求めよ．

【答】(1)　-1　　(2)　略　　(3)　1

【解説】(1)　$\{(x-1)e^{-x}\}'=e^{-x}+(x-1)(-e^{-x})=(2-x)e^{-x}$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t)\,dt &= \Big[(t-1)e^{-t}+\cos(\pi t)+\{2f'(1)+2\}t\Big]_0^1 \\ &= 2f'(1)+1 \end{aligned}$$

である．また $f(x)=x\int_0^x g(t)\,dt-\int_0^x tg(t)\,dt$ より $f'(x)=\int_0^x g(t)\,dt$ なので

$$f'(1)=\int_0^1 g(t)\,dt \iff f'(1)=2f'(1)+1 \quad \therefore\ f'(1)=-1$$

(2)　(1)の結果より $g(x)=(2-x)e^{-x}-\pi\sin(\pi x)$ であり，また $f(0)=0$ である．

$F(x)=x^2-f(x)$ とおくと，$F'(x)=2x-f'(x)=2x-\int_0^x g(t)\,dt$ より

$$\begin{aligned} F''(x) &= 2-g(x) \\ &= 2-(2-x)e^{-x}+\pi\sin(\pi x) \\ &= 2(1-e^{-x})+xe^{-x}+\pi\sin(\pi x) \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ より $1-e^{-x} \geqq 0$，$xe^{-x} \geqq 0$，$\sin(\pi x) \geqq 0$ なので $F''(x) \geqq 0$．

これと $F'(0)=0$ より $0 \leqq x \leqq 1$ において $F'(x) \geqq 0$．

更にこれと $F(0)=0$ より $0 \leqq x \leqq 1$ において $F(x) \geqq 0$．

次に $G(x)=f(x)-\left\{x^2-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3\right\}$ とおくと，$G'(x)=f'(x)-2x+\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{3}{2}\right)x^2$，

$$\begin{aligned} G''(x) &= f''(x)-2+(\pi^2+3)x \\ &= g(x)-2+(\pi^2+3)x \\ &= (2-x)e^{-x}-\pi\sin(\pi x)-2+(\pi^2+3)x, \\ G'''(x) &= (x-3)e^{-x}-\pi^2\cos(\pi x)+\pi^2+3 \\ &= 3(1-e^{-x})+xe^{-x}+\pi^2\{1-\cos(\pi x)\} \end{aligned}$$

なので，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $G'''(x) \geqq 0$．

これと $G''(0)=0$ より $0\leqq x\leqq 1$ のとき $G''(x)\geqq 0$.

更にこれと $G'(0)=0$ より $0\leqq x\leqq 1$ のとき $G'(x)\geqq 0$.

最後にこれと $G(0)=0$ より $0\leqq x\leqq 1$ のとき $G(x)\geqq 0$.

以上より

$$x^2-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3\leqq f(x)\leqq x^2$$

であることが示された.

(3)　$x\to+0$ なので，$0<x<\dfrac{\pi}{4}\,(<1)$ としてよい.

このとき，このとき $\sin x>0$ より

$$x^2-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3\leqq f(x)\leqq x^2$$

$$\iff \quad \frac{x^2-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3}{x\sin x}\leqq\frac{f(x)}{x\sin x}\leqq\frac{x^2}{x\sin x}$$

$$\iff \quad \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\left\{1-\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}\right)x\right\}\leqq\frac{f(x)}{x\sin x}\leqq\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

となり $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x\sin x}=1$ を得る.